MATEMATICA - LEZIONE 17

lunedì 30 ottobre 2023 09:05

Cosa NON fare quando si calcolano i limiti:

1) Applicare i teoremi sulle operazioni tra limiti quando ci sono forme indeterminate.

X $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\underset{\searrow 0}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(-\frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{x+1}$

(SBAGLIATO)

$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{+\infty}{1} = -\infty$

X $\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \underset{\searrow +\infty}{\frac{1}{x+1}} \right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

(SBAGLIATO)

$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$ f.i. $+\infty \cdot 0$

Anche se $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1}$

$= -\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1}$

Non si può dire che

$\lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$

perché in questo prodotto c'è una forma indeterminata del tipo $+\infty \cdot 0$.

CORRETTO

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{x(x+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{x}(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$$

2) Sostituire una quantità con una diversa che ha un comportamento simile (ad esempio con i limiti notevoli)

ESEMPIO

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x+x^3}{x^3}\neq\lim_{x\to0}\frac{x-x+x^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x^3}=1$$

Vedremo tra qualche lezione che:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x+x^3}{x^3}=\frac{5}{6}\neq1.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x+x^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{x}\cdot x-x+x^3}{x^3} \quad \rightarrow 1$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-x+x^3}{x^3}=1$$

ESEMPIO

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}-x^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot x-\frac{x}{2}-x^2}{x^2}\neq\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{x^2}=-1 \quad \rightarrow \frac{1}{2}$$

METODO CORRETTO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} - x^2}{x^2} \cdot \frac{\left(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2} + x^2\right)}{\left(\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2} + x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x - \left(1+\frac{x}{2}+x^2\right)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1 + \frac{x}{2} + x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{x} - \left(\cancel{1} + \frac{x^2}{4} + x^4 + \cancel{x} + 2x^2 + x^3\right)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1+\frac{x}{2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} - \frac{\frac{9}{4}x^2 + x^3 + x^4}{x^2} \cdot \frac{1}{2}$$

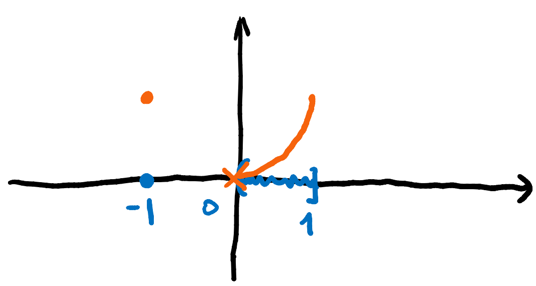
$$= \lim_{x\to 0} - \left(\frac{9}{4} + x + x^2\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{8}$$

FUNZIONI CONTINUE

Def: Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e, $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$. Si dice che f è CONTINUA in x_0 se vale una delle seguenti affermazioni:

1) $x_0 \in D(A)$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
2) $x_0 \notin D(A)$ (in questo caso x_0 è un punto isolato di A).

$$f: (0,1] \cup \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$



- Se $x_0 \in (0,1]$ allora $\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2 = f(x_0)$.
- Se $x_0 = -1$ allora x_0 è un punto isolato del dominio e f è continua in x_0.

OSS

Se A è un intervallo, il grafico di una funzione continua in tutti i punti di A può essere disegnato "senza alzare la penna dal foglio.

Se A non è un intervallo questa affermazione è falsa.

OSS 2

. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in A$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1) f è continua in x_0

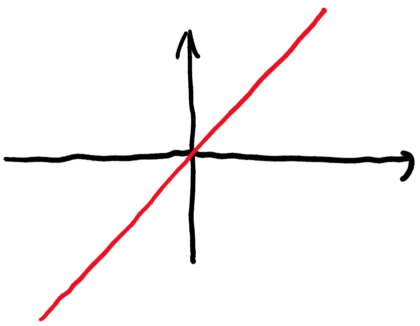
2) $\forall V \in \mathcal{D}_{f(x_0)}$ $\exists U \in \mathcal{D}_{x_0}$ t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in U \cap A$.

3) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$.

ESEMPI

1) $f(x) = x$ è continua in x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0)$$

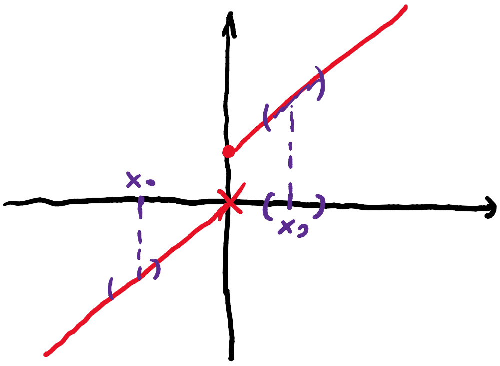


Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Sia $B \subseteq A$, si dice è **CONTINUA** in B se è continua in tutti i punti di B.

(Quando B non viene specificato, si intende che $B = A$).

Possiamo dire che $f(x) = x$ è continua in $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



- f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché:

  se $x_0 < 0$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0)$

  se $x_0 > 0$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x+1 = x_0+1 = f(x_0)$

- f non è continua in 0:

  $\lim_{x \to 0} f(x) \nexists$ perché:

  $$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} x+1 = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} x = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x).$$

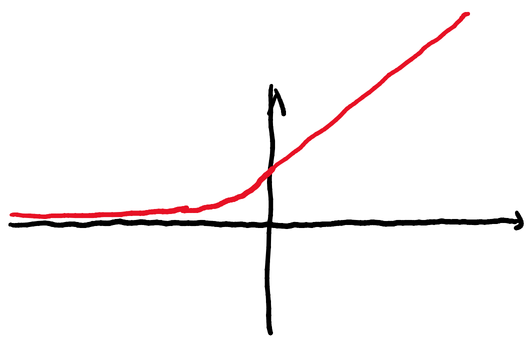
  In particolare non è vero che $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$

Riepilogando:

f non è continua in $\mathbb{R}$ (perché non è continua in 0)

ma è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



È continua in 0? SI

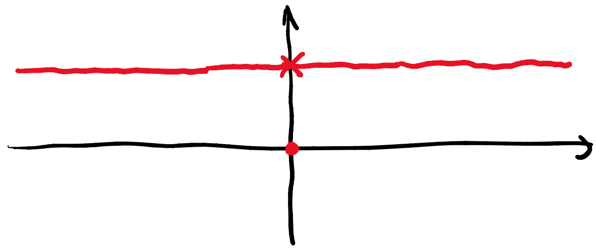
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x+1 = 1$

Inoltre $f(0) = 0+1 = 1$.

Quindi è vero che $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

4) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ ma $f(0) = 0$.

f non è continua in 0.

5) $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

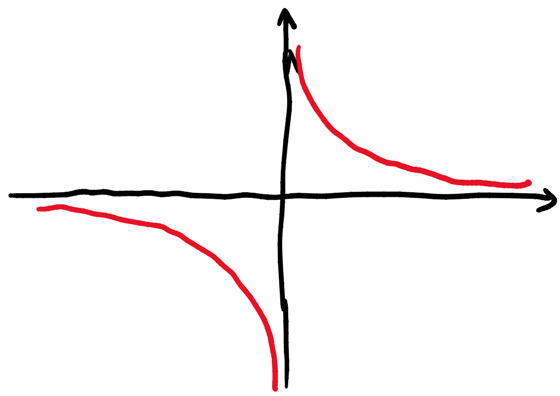
f è continua in $\mathbb{R}$.

6) I polinomi sono funzioni continue su $\mathbb{R}$.

7) $f(x) = \frac{1}{x}$

$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

f è continua nel suo dominio.



8) Tutte le funzioni elementari che abbiamo visto sono continue nel loro dominio:

- x^{α} con $\alpha \in \mathbb{R}$
- a^x con $a > 0$
- $\log_a x$ con $a > 0$, $a \neq 1$
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$.

TEOREMA Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e $x_0 \in A$. Se f e g sono continue in x_0 allora:

1) $f + g$ è continua in x_0
2) $f - g$ è continua in x_0
3) cf è continua in x_0 $\forall c \in \mathbb{R}$.
4) $f \cdot g$ è continua in x_0
5) $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 se $\boxed{g(x_0) \neq 0}$.

ESEMPI

- Se $f(x) = x^4 + x - 5$ è continua su $\mathbb{R}$.

- $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^4+1}$ è continua in $\mathbb{R}$.

  (Si noti che $x^4 + 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, in particolare $x^4+1 \neq 0$)

- $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^4-1}$ è continua (nel suo dominio)

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI COMPOSTE).
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ due insiemi. Siano $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0.

ESEMPI.

1) $h(x) = \sin(x^2 + 3x)$

$h(x) = g(f(x))$ dove $g(x) = \sin x$, $f(x) = x^2 + 3x$.

Dato che f e g sono continue in $\mathbb{R}$, h è continua in $\mathbb{R}$.

2) $h(x) = \sqrt{5 - 2x}$

$5 - 2x \geq 0 \iff 2x \leq 5 \iff x \leq \frac{5}{2}$

$\mathrm{Dom}(h) = (-\infty, \frac{5}{2}]$

h è composizione di funzioni continue quindi è continua. Più precisamente:

$h(x) = g(f(x))$ dove $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = 5 - 2x$.

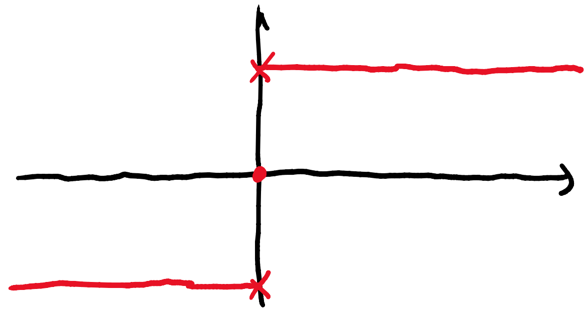
$$f: \begin{array}{ccc} (-\infty, \frac{5}{2}] & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ x & \longmapsto & 5 - 2x \end{array} \quad \text{e} \quad g: \begin{array}{ccc} [0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

TEOREMA (CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA)
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: I \longrightarrow f(I)$ una funzione continua e iniettiva. Allora $f^{-1}: f(I) \to I$ è continua.

Alcuni esempi di funzioni non continue.

Funzione SEGNO:

$$\text{sign}: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

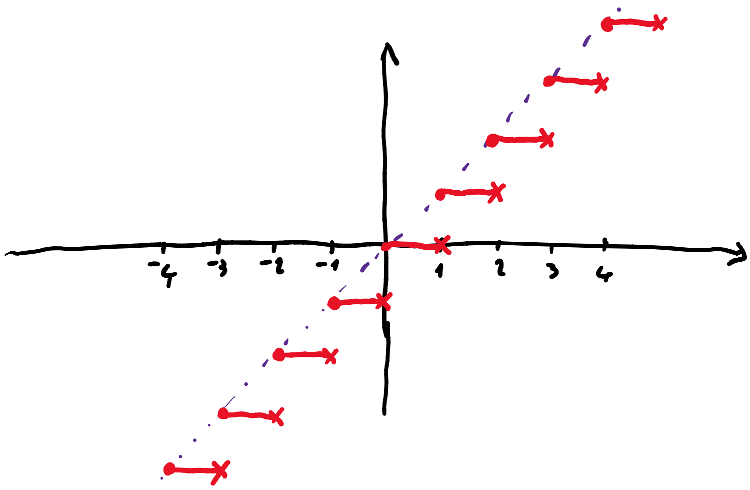


sign non è continua in 0.

Funzione PARTE INTERA

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor \end{array} \qquad \text{dove } \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

- $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$
- $\lfloor 2{,}27 \rfloor = 2$
- $\lfloor 121{,}7 \rfloor = 121$
- $\lfloor -1{,}1 \rfloor = -2$
- $\lfloor 2 \rfloor = 2$
- $\lfloor -3 \rfloor = -3$



f non è una funzione continua. Più precisamente è continua in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ma non è continua nei punti di $\mathbb{Z}$.

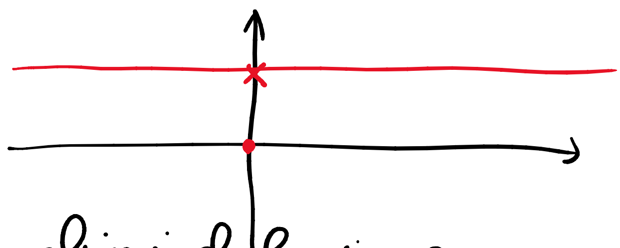
Classificazione dei punti di discontinuità

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $\boxed{x_0 \in A}$ si dice un PUNTO DI DISCONTINUITÀ per f se f non è continua in x_0.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE se $x_0 \in D_r(A)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste finito ma è diverso da $f(x_0)$.

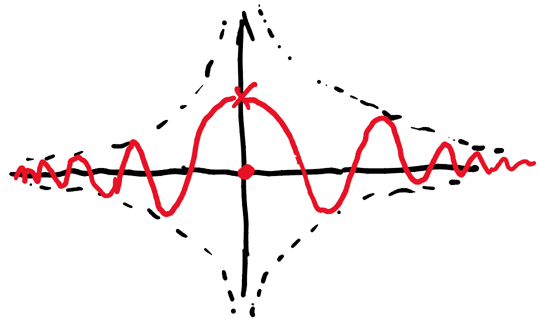
ESEMPI:

- $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



f ha una discontinuità eliminabile in 0.

- $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq 0 = f(0)$$

f ha una discontinuità eliminabile in 0.

Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme, $f: A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Si dice che x_0 è un PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SALTO per f se $x_0 \in D_r^+(A) \cap D_r^-(A)$ e:

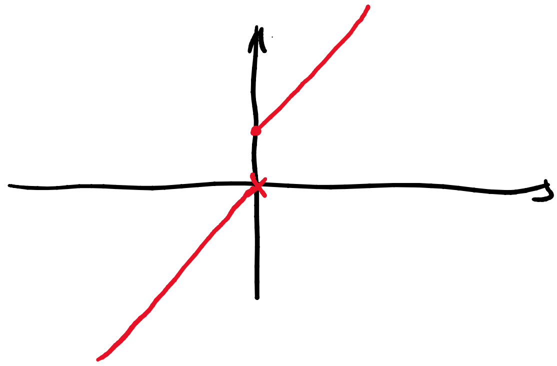
1) $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ esistono e sono finiti.

2) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

In tal caso la differenza $\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ si dice **SALTO** di f in x_0.

ESEMPI

1) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

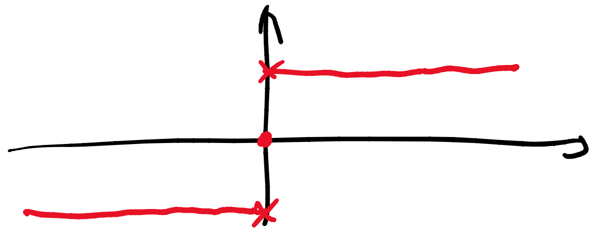


ho una discontinuità di salto in $x_0 = 0$

Il salto di f in zero è 1

2) la funzione $f(x) = \operatorname{segn} x$ ha una discontinuità di salto in $x_0 = 0$

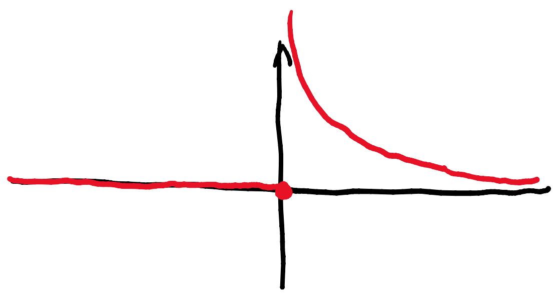
Il salto di f in 0 è 2.



Def: Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$. Si dice che x_0 è un punto di **DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE** se è un punto di discontinuità che non è eliminabile né di salto

ESEMPI

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$



- $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$